

Introduction au bruit radioélectrique

par **Philippe MAGNE**

Ingénieur de l'École Supérieure d'Électricité
Directeur Scientifique et Technique à la Société Thomson-CSF
Professeur à l'École Supérieure d'Électricité

1. Concepts à considérer	E 6 150 - 3
1.1 Hypothèse moléculaire et chaleur.....	— 3
1.2 Hypothèse quantique	— 3
1.3 Hypothèse du corps noir.....	— 4
2. Bruit dans le cas de modes de résonance à une dimension	— 4
2.1 Densité spectrale	— 4
2.2 Bruit engendré par une résistance (effet Johnson). Sources fictives de Nyquist	— 4
2.2.1 Modélisation de l'équilibre thermodynamique.....	— 4
2.2.2 Statistique gaussienne de la tension $u(t)$ de bruit aux bornes d'une résistance.....	— 6
2.2.3 Autres formules concernant $u(t)$	— 6
2.3 Bruit filtré par un passe-bande	— 6
3. Bruit dans le cas de modes de résonance à trois dimensions....	— 7
3.1 Rayonnement de l'unité de surface dans un angle solide 2 stéradians.	— 7
3.1.1 Densité spectrale	— 7
3.1.2 Puissance rayonnée dans tout le spectre de Maxwell.....	— 7
3.2 Champ électromagnétique de l'onde de bruit	— 8
4. Équilibre thermodynamique des antennes radioélectriques	— 9
5. Notion de température de bruit.....	— 9
5.1 Ambiance isotherme	— 9
5.2 Ambiance réelle.....	— 9
6. Bruit additif minimal limite physique concernant les amplificateurs.....	— 10
6.1 Amplification obtenue par inversion de populations entre niveaux d'énergie atomiques	— 10
6.2 Densité spectrale minimale de bruit lorsque la température T tend vers zéro.....	— 10
6.3 Densité spectrale minimale de bruit à une température T	— 11
7. Conclusion	— 12
Référence bibliographique	— 12

Le bruit électrique est constaté lorsque l'on utilise une grande amplification et que certains traducteurs le rendent perceptible à nos sens (haut-parleurs, tubes cathodiques de téléviseurs ou d'oscilloscopes, etc.).

Le bruit se présente de façon additive au signal utile, il subsiste même lorsque ce dernier est interrompu ; il naît, à la fois, dans les amplificateurs et dans les sources de signaux.

Le présent article se propose de rappeler un certain nombre de notions physiques qui permettront aux ingénieurs de mieux situer les phénomènes et de calculer les limites qui ne sauraient être dépassées.

D'un point de vue philosophique, l'existence de signaux utiles et de bruit place l'ingénieur devant le dualisme **ordre et désordre**.

Par exemple, l'observation à l'oscilloscope de deux types de tension confirme ce point de vue (figure A).

La figure Aa montre une sinusoïde, fonction certaine dont la grandeur est prévisible à chaque instant, alors que le bruit (figure Ab) est imprévisible et suggère le chaos.

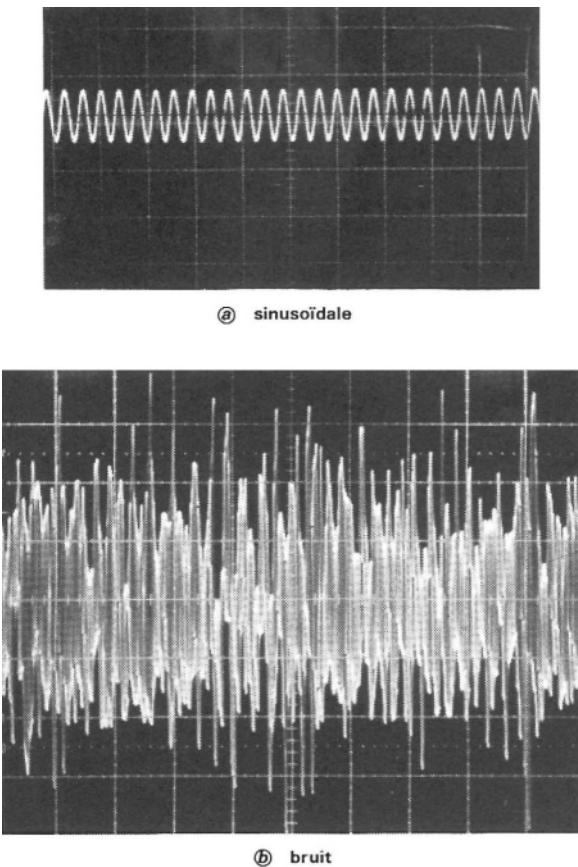


Figure A – Observation à l'oscilloscope de deux types de tension

1. Concepts à considérer

Comme le bruit n'est perceptible qu'à travers un certain nombre d'intermédiaires, par exemple des appareils de mesure, l'analyse de ses causes ne peut être effectuée qu'à partir des concepts fondamentaux acquis à diverses époques de l'évolution des idées en physique.

1.1 Hypothèse moléculaire et chaleur

La structure de la matière considérée comme constituée d'un grand nombre de molécules, et l'interprétation par Bernouilli de la chaleur comme agitation de ces molécules (confirmée par les expériences de Brown), peuvent être considérées comme une origine thermique du bruit.

Concernant cette première hypothèse, on peut introduire la notion de désordre déjà mise en exergue au début de cet article, en faisant allusion à l'état gazeux qui se prête assez bien à sa compréhension.

C'est un état où une multitude de molécules distinctes voltigent en tous sens à travers l'espace entrant en collision les unes avec les autres, les échanges d'énergie se faisant par des chocs qui modifient à chaque instant en grandeur et direction la vitesse des particules.

Fondamentalement, on peut admettre que la description qui vient d'être esquissée représente une forme de désordre qui traduit l'équilibre thermodynamique des systèmes macroscopiques.

Assez curieusement, on peut aussi établir un rapprochement avec la théorie de l'information et exprimer le désordre *quantitativement* par le manque d'information que nous pourrions connaître du système. En l'occurrence, l'information est, à chaque instant, la connaissance de l'énergie cinétique de chacune des particules, par exemple.

Si l'on désigne par p la densité de probabilité de l'énergie cinétique W pour une particule, la quantité de désordre ou manque d'information que nous pourrions avoir du système est exprimable par l'entropie du message, déduite de la théorie de l'information qui a la même forme que l'entropie physique :

$$-\sum p \ln p$$

Lorsque l'on rend maximale l'entropie, c'est-à-dire le désordre pour exprimer l'équilibre thermodynamique, on aboutit à une répartition de l'énergie qui est proportionnelle à :

$$\exp(-W/kT)$$

avec k ($= 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K ou $8,617 \cdot 10^{-5}$ eV/K) constante de Boltzmann,

T (K) température absolue.

Le tableau 1 donne les valeurs de kT à différentes températures.

Tableau 1 – Valeurs de kT à différentes températures

T (K)	kT (J)	kT (eV)
2,76	$3,8 \cdot 10^{-23}$	$2,38 \cdot 10^{-4}$
290	$4 \cdot 10^{-21}$	$2,50 \cdot 10^{-2}$
3 000	$4,14 \cdot 10^{-20}$	$2,58 \cdot 10^{-1}$
30 000	$4,14 \cdot 10^{-19}$	2,58

■ Relation de Boltzmann : application

Si, parmi une population de N particules, il y en a N_1 d'énergie W_1 et N_2 d'énergie W_2 , le rapport N_2/N_1 vaut :

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{W_2 - W_1}{kT}\right)$$

Le tableau 2 donne les rapports des populations et les énergies en fonction de ces populations.

Tableau 2 – Populations et énergies

$\frac{N_2}{N_1}$	$\frac{W_2 - W_1}{kT}$
0,905	0,1
0,368	1
$4,54 \cdot 10^{-5}$	10
$3,75 \cdot 10^{-44}$	100

1.2 Hypothèse quantique

Cette hypothèse, née de l'interprétation de l'effet photoélectrique et des idées émises par Planck et Einstein, conduit à admettre que les échanges d'énergie ne se font pas de façon continue mais discontinue, par paquets, appelés *photons* ou *quanta* d'énergie.

Nous allons introduire ce double aspect pour les fréquences du spectre électromagnétique de Maxwell.

L'énergie des photons est proportionnelle à la fréquence, de sorte que, considérant l'énergie W échangée, elle ne peut prendre que les valeurs discrètes :

$$W = nhf = nhc/\lambda$$

avec c vitesse de la lumière,

f fréquence,

h ($= 6,626 \cdot 10^{-34}$ J · s ou $4,136 \cdot 10^{-15}$ eV/Hz) constante de Planck,

λ longueur d'onde,

n nombre de photons échangés (nombre entier).

Le tableau 3 donne l'énergie des photons.

Tableau 3 – Énergie des photons

Nature des ondes	f (GHz)	λ	$hf = hc/\lambda$ (J)	$hf = hc/\lambda$ (eV)
Centimétriques	1	30 cm	$6,6 \cdot 10^{-25}$	$4,13 \cdot 10^{-6}$
	10	3 cm	$6,6 \cdot 10^{-24}$	$4,13 \cdot 10^{-5}$
Millimétriques	30	10 mm	$1,98 \cdot 10^{-23}$	$1,24 \cdot 10^{-4}$
	100	3 mm	$6,6 \cdot 10^{-23}$	$4,13 \cdot 10^{-4}$
Submillimétriques	300	1 mm	$1,98 \cdot 10^{-22}$	$1,24 \cdot 10^{-3}$
	6 000	50 µm	$3,97 \cdot 10^{-21}$	$2,47 \cdot 10^{-2}$
Lumineuses (visible)	400 000	750 nm	$2,65 \cdot 10^{-19}$	1,65
	700 000	428 nm	$4,63 \cdot 10^{-19}$	2,89
Rayons X	$5 \cdot 10^9$	0,6 Å	$3,31 \cdot 10^{-15}$	20 660
	$3 \cdot 10^{10}$	0,1 Å	$1,98 \cdot 10^{-14}$	123 580

Nota : bien que ce tableau ne donne des valeurs numériques qu'à partir des ondes centimétriques, la relation hc/λ s'applique aussi aux grandes ondes, mais les photons sont d'une énergie extrêmement faible.

1.3 Hypothèse du corps noir

Planck, pour expliquer que l'augmentation de la température provoque un rayonnement de longueur d'onde de plus en plus courte (corps qui rougissent au feu, par exemple), a associé le concept d'équipartition de l'énergie au concept de discontinuité de l'énergie dans une théorie dite du corps noir.

Ce corps idéal est parfaitement absorbant et a une émissivité maximale à toutes fréquences.

Pour associer les deux concepts évoqués précédemment, donc que l'énergie échangée $W = nhf$, la statistique de l'énergie doit être réécrite. La probabilité que l'énergie échangée soit égale à nhf est proportionnelle à :

$$\exp\left(-\frac{nhf}{kT}\right)$$

Lorsque l'on considère un grand nombre de résonateurs, l'équipartition de l'énergie entraîne que l'énergie moyenne \bar{W} emmagasinée est donnée par :

$$\bar{W} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nhf \exp\left(-\frac{nhf}{kT}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{nhf}{kT}\right)} = \frac{hf}{\exp\left(\frac{hf}{kT}\right) - 1}$$

Remarques :

- à l'énergie cinétique de particules, on a substitué l'énergie emmagasinée par des résonateurs (modes de résonances particuliers) ;

- le rapport hf/kT est révélateur d'une frontière quantique :

- si $hf \ll kT$, $\bar{W} \rightarrow kT$,
- si $hf \gg kT$, $\bar{W} \rightarrow 0$;

- à travers ces considérations, le bruit électrique et le rayonnement du corps noir ont une parenté qui associe électromagnétisme et thermodynamique.

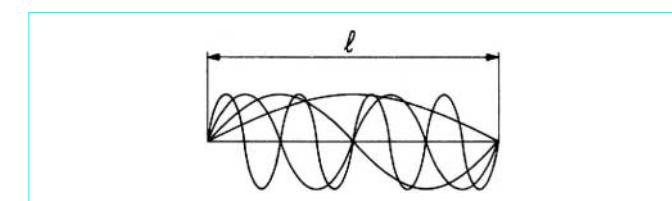


Figure 1 – Résonances multiples d'une ligne de transmission

Le nombre de modes de résonance par unité de longueur, ou densité de modes, est obtenu en faisant tendre ℓ vers l'infini :

$$m_1 = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} \times \frac{dn}{df} = \frac{2\ell/c}{\ell} = \frac{2}{c}$$

La densité d'énergie *en ligne* par unité de longueur est donnée par :

$$\rho_1 = m_1 \times \bar{W} = \frac{2}{c} \times \frac{hf}{\exp(hf/kT) - 1}$$

La densité du flux de puissance portée par les deux ondes qui se propagent en sens inverse sur la ligne est égale à la moitié de la densité d'énergie *en ligne* divisée par le temps mis pour parcourir l'unité de longueur.

On aboutit à la densité spectrale :

$$N_0(W/\text{Hz}) = \frac{\rho_1/2}{1/c} = \frac{hf}{\exp(hf/kT) - 1}$$

La figure 2 montre comment évolue la densité spectrale N_0 à différentes températures en fonction de la fréquence. On peut conclure que la densité spectrale augmente lorsque la température augmente et que le cut-off quantique recule vers les fréquences élevées dans cette même condition.

2. Bruit engendré par une résistance (effet Johnson). Sources fictives de Nyquist

2.2.1 Modélisation de l'équilibre thermodynamique

Si l'on place aux extrémités de la ligne, déjà évoquée, deux résistances R égales à l'impédance caractéristique (figure 3), l'ensemble étant en équilibre thermodynamique à la température T , ces résistances absorbent entièrement les flux de puissance de densité spectrale N_0 . Réciproquement, les résistances R engendrent une puissance de bruit exactement égale à celle absorbée pour maintenir cet équilibre.

D'une certaine manière, les résistances sont des corps noirs au sens de Planck, parfaitement absorbantes et de pouvoir émissif maximal.

Le bruit des résistances a été mis en évidence pour la première fois par Johnson.

Pour rendre compte du fait que la puissance de bruit que peut délivrer une résistance R est indépendante de la valeur de R , Nyquist a proposé les schémas équivalents de Thévenin et de Norton tels que représentés sur la figure 4.

La force électromotrice du bruit (fém) ou le courant électromoteur de bruit (cem) sont tels que la puissance électrique maximale disponible aux bornes 11' (figure 4) pour une petite bande de fréquence df est égale à $N_0 df$.

2. Bruit dans le cas de modes de résonance à une dimension

Connaissant l'énergie moyenne stockée dans un mode de résonance à la fréquence f , il faut calculer la densité de modes par unité de bande passante pour connaître la densité d'énergie puis la densité spectrale de la puissance de bruit.

2.1 Densité spectrale

Considérons une ligne de transmission de longueur ℓ court-circuitée à ses deux extrémités et ayant un seul mode de propagation.

Il y a résonance à chaque fois que $\ell = n \frac{\lambda}{2}$, avec n entier (figure 1) :

$$n = \frac{2\ell}{c} f$$

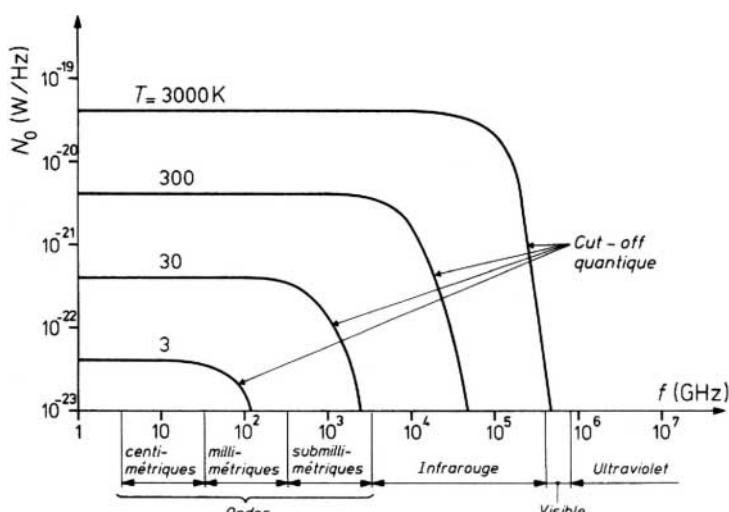


Figure 2 – Densité spectrale de bruit N_0 en fonction de la fréquence f

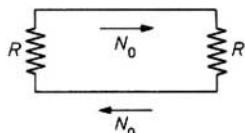


Figure 3 – Équilibre thermodynamique des résistances

R (sans bruit)

$$e_{df} = \sqrt{4 k R T df}$$

$$N_0 df = e_{df}^2 / 4 R$$

Ⓐ schéma de Thévenin



$$G \text{ conductance sans bruit } (= 1/R)$$

$$i_{df} = \sqrt{4 k G T df}$$

$$N_0 df = i_{df}^2 / 4 G$$

Ⓑ schéma de Norton

Figure 4 – Sources fictives de bruit de Nyquist

La puissance N de bruit pour une bande de bruit B rectangulaire est donnée, dans le domaine de fréquences, où $N_0 \approx kT$, par :

$$N = \int_0^B N_0 df = N_0 B = kTB$$

On pourrait être tenté de croire que lorsque $B \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$. Cela ne peut pas se produire car le cut-off quantique limite cette puissance (figure 2).

Pour connaître la puissance totale de bruit engendrée à la température T , il faut écrire :

$$N = \int_0^\infty kT \frac{\frac{hf}{kT}}{\exp(hf/kT) - 1} df = \frac{(kT)^2 \pi^2}{h} \frac{1}{6}$$

On peut définir une bande de bruit équivalente B_N par l'expression :

$$kTB_N = \frac{(kT)^2 \pi^2}{h} \frac{1}{6}$$

$$B_N (\text{GHz}) = 34T$$

Application numérique

Pour $T = 290$ K et $R = 50 \Omega$, on a :

$$N = 3,97 \cdot 10^{-8} \text{ W}$$

$$B_N = 9\,860 \text{ GHz}$$

La fém efficace est donnée par :

$$e_{eff} = \sqrt{4RN}$$

Soit

$$e_{eff} = 2,8 \text{ mV}$$

L'interprétation de ce résultat, étant donné la valeur de B , doit prendre en compte le fait qu'une résistance réelle est associée à une capacité et à une inductance parasites. Ainsi, aux fréquences très élevées (supérieures à quelques centaines de mégahertz), la résistance devient une impédance dont le terme réactif lui confère un coefficient de réflexion très important.

L'assimilation d'une résistance à un corps noir n'est possible que dans la bande de fréquences où une résistance se comporte comme une charge adaptée du genre de celles utilisées par les ingénieurs spécialisés en hyperfréquence.

2.2.2 Statistique gaussienne de la tension $u(t)$ de bruit aux bornes d'une résistance

La tension $u(t)$, aux bornes d'une résistance, est la résultante de toutes les résonances excitées thermiquement (figure 1).

Comme le spectre de $u(t)$ est continu (figure 2), le nombre de composantes sinusoïdales est extrêmement grand, il s'ensuit que la statistique de la tension de bruit est gaussienne.

Paradoxalement, les composantes élémentaires de $u(t)$ sont de la forme montrée sur la figure A.a.

La figure 5 montre $u(t)$ et la façon dont certaines mises en phase occasionnelles de composantes élémentaires sinusoïdales engendrent des impulsions de bruit (sursauts énergétiques).

En désignant par σ la valeur efficace de $u(t)$ qui est constante pour un processus stationnaire, la probabilité P que $u \geq U_c$ ou $u \leq -U_c$ est donnée par intégration de la densité de probabilité :

$$P(u \geq U_c ; u \leq -U_c) = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} \int_{U_c}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) du$$

$$P(u) = \operatorname{erfc}\left(\frac{U_c}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

Le tableau 4 donne la probabilité de dépasser les seuils U_c et $-U_c$.

2.2.3 Autres formules concernant $u(t)$

L'intervalle de temps moyen \bar{I}_E entre deux événements $u \geq U_c$ et $u \leq -U_c$ est :

$$\bar{I}_E = \frac{\sqrt{3}}{2B} \exp\left(\frac{U_c^2}{2\sigma^2}\right)$$

La durée moyenne $\bar{\Delta t}$ de l'événement $u \geq U_c$ et $u \leq -U_c$:

$$\bar{\Delta t} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{\sigma}{U_c} \frac{1}{B}$$

Application numérique

Pour $B = 10$ MHz et $P = 10^{-6}$, soit :

$$\frac{U_c}{\sigma} = 4,87 \quad (\text{tableau 4})$$

on trouve

$$\bar{I}_E = 12,3 \text{ ms}$$

$$\bar{\Delta t} = 14 \text{ ns}$$

2.3 Bruit filtré par un passe-bande

La puissance de bruit disponible aux bornes 11' (figure 6) est donnée par :

$$N = \int_0^{\infty} kT|H(j2\pi f)|^2 df = kTB_N$$

avec $H(j2\pi f)$ fonction de transfert du filtre passe-bande.

Tableau 4 – Probabilité de dépasser les seuils U_c et $-U_c$

$\frac{U_c}{\sigma}$	$20 \lg \frac{U_c}{\sigma}$ (dB)	$P(u \geq U_c ; u \leq -U_c)$
1,64	4,3	10^{-1}
1,95	5,8	$5 \cdot 10^{-2}$
2,58	8,2	10^{-2}
3,27	10,3	10^{-3}
3,85	11,7	10^{-4}
4,37	12,8	10^{-5}
4,87	13,7	10^{-6}

La bande équivalente de bruit est donnée par :

$$B_N = \int_0^{\infty} |H(j2\pi f)|^2 df$$

La tension de bruit qui apparaît aux bornes 11' présente une allure quasi sinusoïdale comme le montre la figure 7.

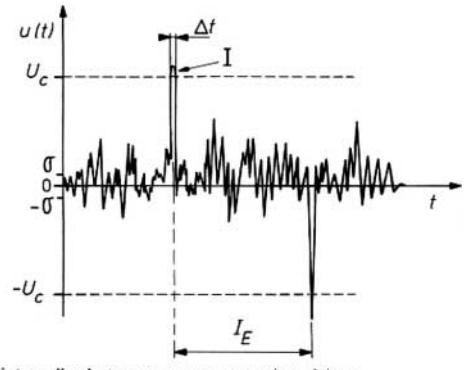


Figure 5 – Tension de bruit $u(t)$ et impulsion spontanée

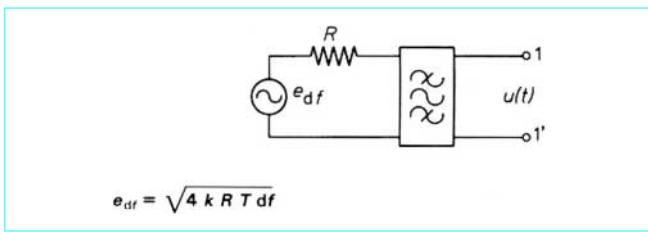


Figure 6 – Filtrage du bruit engendré par une résistance

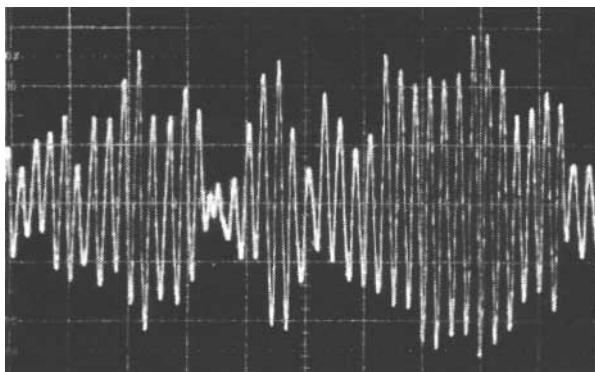


Figure 7 – Tension de bruit après filtrage par un filtre passe-bande

3. Bruit dans le cas de modes de résonance à trois dimensions

Implicitement, ce cas conduit à considérer une onde de bruit transportant l'énergie à travers l'espace et réalisant ainsi l'équipartition de l'énergie.

La densité spectrale est calculée, comme l'a fait Planck, dans l'intention de connaître le rayonnement qui serait issu d'un petit trou dans la paroi d'un corps noir creux comme le montre la figure 8. L'approche consiste en un dénombrement d'ondes stationnaires.

Si l'on considère une cellule de forme parallélépipédique de dimensions A , B , C il y a résonance si :

$$\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{n_A}{A}\right)^2 + \left(\frac{n_B}{B}\right)^2 + \left(\frac{n_C}{C}\right)^2$$

avec $\lambda = c/f$,

n_A , n_B , n_C nombres de résonance suivant les dimensions A , B , C .

Le calcul de la densité de modes de résonance par unité de bande passante et unité de volume est plus compliqué à effectuer que dans le cas d'une seule dimension.

On aboutit à :

$$m_3 = 4\pi f^2/c^3$$

Cette proportionnalité à f^2 doit être considérée comme une propriété de l'espace lui-même.

En tenant compte de deux polarisations possibles pour l'onde, on aboutit à :

$$m_3 = 8\pi f^2/c^3$$

La densité d'énergie par unité de volume et de bande passante est :

$$\rho_3 = m_3 \times \overline{W} = \frac{8\pi f^2}{c^3} \frac{hf}{\exp\left(\frac{hf}{kT}\right) - 1}$$

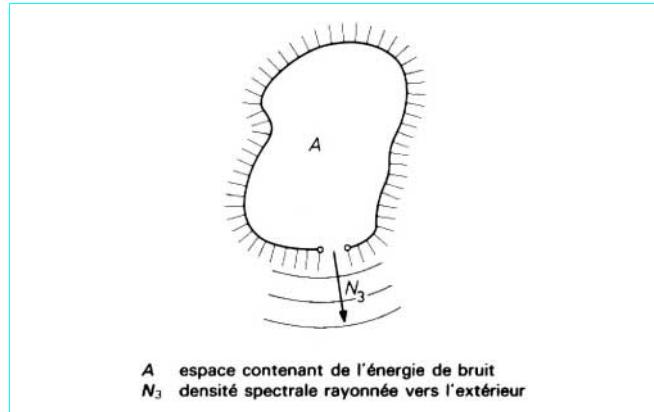


Figure 8 – Rayonnement d'un petit trou dans un corps noir creux de température T

3.1 Rayonnement de l'unité de surface dans un angle solide 2π stéradians

3.1.1 Densité spectrale

La densité spectrale du flux de puissance rayonnée dans un angle solide 2π à travers le petit trou montré sur la figure 8 est donnée par :

$$N_3 = 2\pi \frac{(kT)^3}{h^2 c^2} \frac{\left(\frac{hf}{kT}\right)^3}{\exp\left(\frac{hf}{kT}\right) - 1}$$

N_3 est maximale pour $\frac{hf}{kT} = 2,82$, c'est-à-dire pour :

$$f_{max} (\text{GHz}) = 58,73 T$$

soit $N_{3\ max} (\text{W/m}^2 \cdot \text{Hz}) = 5,94 \cdot 10^{-19} T^3$.

La figure 9 montre comment varie N_3 en fonction de la fréquence pour deux températures : celle de la terre $T = 290 \text{ K}$ et celle du soleil $T = 5\ 800 \text{ K}$.

On peut constater que lorsque la température s'élève, le bruit occupe une partie de plus en plus grande du spectre de Maxwell.

3.1.2 Puissance rayonnée dans tout le spectre de Maxwell

Cette puissance est donnée par :

$$P (\text{W/m}^2) = \int_0^\infty N_3 df = \frac{2\pi^5}{15} \frac{(kT)^4}{h^3 c^2} = 5,66 \cdot 10^{-8} T^4$$

Cela est la formule de Stefan-Boltzmann.

Le tableau 5 donne la puissance de bruit et la fréquence maximale rayonnées en fonction de la température.

Remarque : par suite de la loi en T^4 , la puissance de bruit émise par mètre carré dans un angle solide de 2π stéradians varie dans d'énormes proportions.

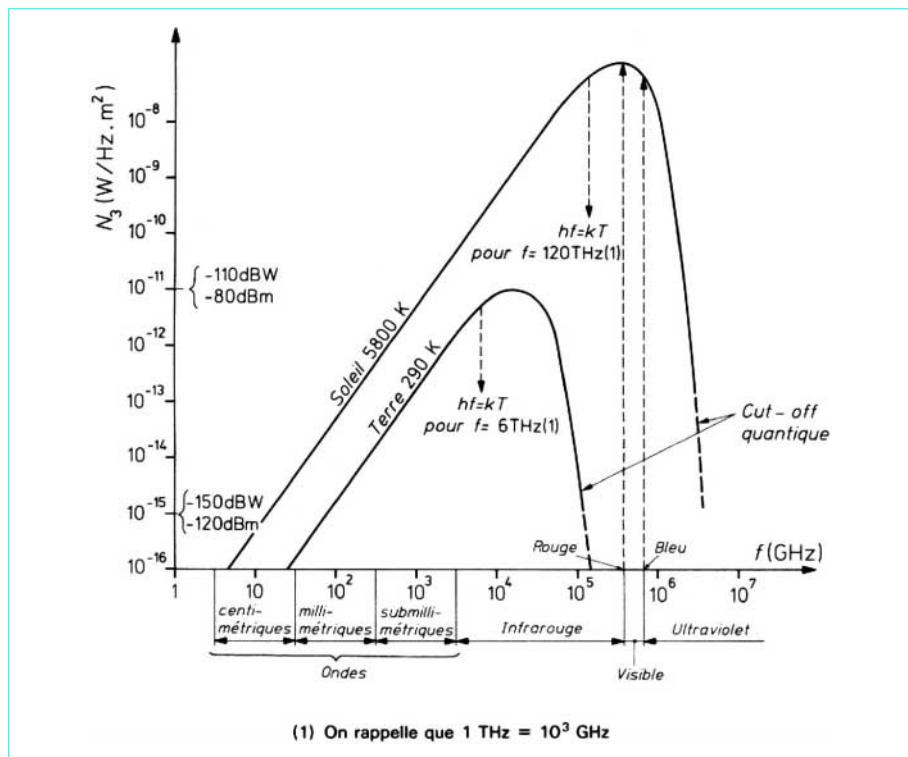
Figure 9 – Puissance rayonne N_3 par 1 m^2 dans l'angle solide 2π par unité de bande passante

Tableau 5 – Puissance de bruit et fréquence maximale rayonnées en fonction de la température

Nature des ondes	T (K)	P (W/m ²)	$N_3 \text{ max}$ (W/m ² . Hz)	f_{max} (GHz)	λ_{min}
Millimétriques	2,76	$3,27 \cdot 10^{-6}$	$1,24 \cdot 10^{-17}$	162,09	1,8 mm
Infrarouge	290	400	$1,44 \cdot 10^{-11}$	17 031	176 μm
Lumineuses (visible)	5 800	$64 \cdot 10^6$	$1,15 \cdot 10^{-7}$	340 634	880 nm

Nous pouvons comparer les $3,27 \mu\text{W}/\text{m}^2$ du bruit cosmique fossile provenant d'un corps noir à 2,76 K aux $64 \text{ MW}/\text{m}^2$ émis par la surface du soleil à 5 800 K.

■ Cas où $hf \ll kT$ (fréquences radioélectriques) :

$$N_3 = \frac{2\pi f^2 k T}{c^2}$$

$$N_3 (\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{Hz}) = 9,64 \cdot 10^{-40} f^2 T (\text{dans } 2\pi \text{ stéradians})$$

Cela est la **formule de Rayleigh-Jeans**.

3.2 Champ électromagnétique de l'onde de bruit

Le champ électromagnétique de l'onde de bruit est transversal. Ce rayonnement, intuitivement, ne peut pas avoir une polarisation linéaire.

La figure 10 montre une simulation de la trajectoire de l'extrémité du vecteur champ électrique dans le plan de l'onde.

Pour rendre cette simulation possible, les spectres des deux composantes linéaires et orthogonales du champ ont été filtrés dans 10 % de bande.

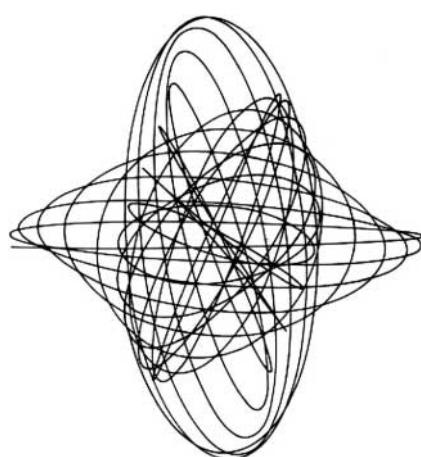


Figure 10 – Simulation de l'onde de bruit (champ électrique transversal)

4. Équilibre thermodynamique des antennes radioélectriques

Une antenne peut être considérée comme un dispositif de couplage d'un mode particulier de propagation à la propagation en espace libre.

L'équilibre thermodynamique d'une antenne dans une enceinte isotherme (corps noir creux, figure 11) s'exprime en rendant égales la puissance de bruit reçue et la puissance de bruit émise par une charge adaptée placée à l'accès de l'antenne.

La puissance émise par la charge adaptée qui se comporte comme une résistance dans sa bande d'adaptation est donnée par :

$$P_{\text{émise}} = \frac{1}{2} m_1 c \bar{W}$$

avec m_1 densité de modes à une dimension.

La puissance reçue, provenant des parois du corps noir creux est donnée par :

$$P_{\text{reçue}} = \frac{1}{2} m_3 c \bar{W} \bar{A}$$

avec \bar{A} aire moyenne de capture de l'antenne dans 4π stéradians, m_3 densité de modes à trois dimensions, le facteur $\frac{1}{2}$ tient compte du fait qu'une seule polarisation est captée.

L'équation de l'équilibre thermodynamique s'écrit ainsi :

$$\frac{1}{2} m_1 c \bar{W} = \frac{1}{2} m_3 c \bar{W} \bar{A}$$

d'où l'on tire :

$$\bar{A} = \frac{m_1}{m_3} = \frac{\frac{2}{c}}{\frac{8\pi f^2}{c^3}} = \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

On reconnaît ici l'aire de capture de la source isotrope.

Pour une antenne directive, l'aire de capture A dans une direction θ, φ est fonction de θ et φ .

L'aire moyenne de capture est donnée par :

$$\bar{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} A(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi$$

Les conditions d'équilibre thermodynamique évoquées précédemment montrent que \bar{A} ne saurait être supérieure à $\lambda^2/4\pi$ qui est aussi l'aire d'une antenne de gain unité puisque le gain g traduit la directivité et est donné par la formule

$$g(\theta, \varphi) = \frac{4\pi A(\theta, \varphi)}{\lambda^2}$$

Si $g = 1$, $A = \lambda^2/4\pi$.

5. Notion de température de bruit

5.1 Ambiance isotherme

Supposons l'antenne sans perte et plaçons-nous à des fréquences telles que l'on puisse assimiler N_3 à $\frac{2\pi f^2}{c^2} kT = \frac{2\pi}{\lambda^2} kT$, c'est-à-dire à des fréquences où l'effet quantique est négligeable.

La densité spectrale du bruit capté dans 4π stéradians est :

$$N_0 = \bar{A} \cdot 2 N_3 = \frac{4\pi}{\lambda^2} k T \bar{A}$$

Si nous écrivons que $N_0 = kT_N$, T_N étant la température de bruit, on a :

$$N_0 = kT_N = \frac{4\pi}{\lambda^2} k T \bar{A}$$

Si l'on prend $\bar{A} = \lambda^2/4\pi$, on obtient :

$$T_N = T$$

Dans ce cas (isotherme), la température de bruit est égale à la température thermodynamique T de l'enceinte isotherme.

5.2 Ambiance réelle

Supposons l'antenne placée à la surface de la terre, comme le montre la figure 12, et braquée vers le cosmos.

On peut constater que les lobes latéraux captent du bruit en provenance de sources chaudes terrestres à 290 K en moyenne. Seul le lobe principal capte le bruit cosmique à 2,76 K. Dans ce cas, la température thermodynamique des sources de bruit est fonction de θ, φ , ce qui revient à exprimer que la température T du corps noir creux de la figure 11 est fonction de θ, φ (angles repères par rapport à l'antenne).

La température de bruit T_N est donnée par :

$$T_N = \frac{1}{4\pi \bar{A}} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} T(\theta, \varphi) A(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi$$

T_N ne peut plus maintenant être assimilée à une température thermodynamique, mais dépend du diagramme de rayonnement et de l'orientation de l'antenne.

Le tableau 6 donne la température de bruit d'antennes réelles.

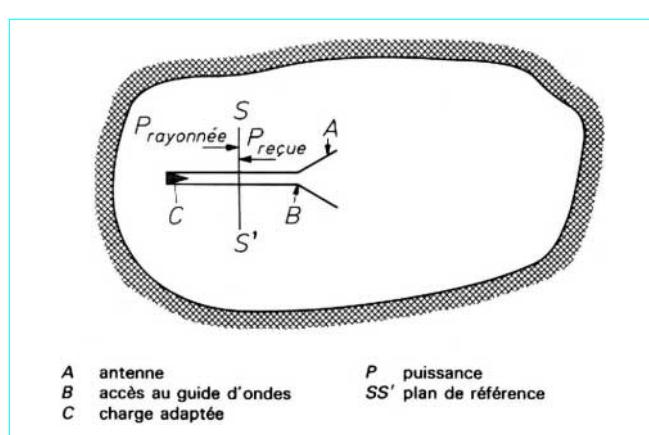


Figure 11 – Antenne placée dans une enceinte isotherme (corps noir) de température T

Tableau 6 – Température de bruit d'antennes réelles

Fréquence (GHz)	Longueur d'onde (cm)	Diamètre d'antenne (m)	Angle d'élévation du lobe principal (degré)	Température de bruit (K)	fém de bruit $R = 50\Omega$ $B = 36$ MHz (μ V)	Applications
4	7,5	32,50	5 à 10	30 à 50	1,7 à 2	Télécommunications par satellite
6	5	4	0	290	5	Faisceaux hertziens

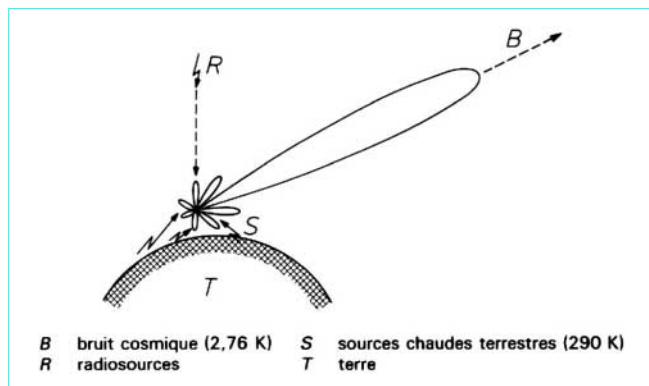


Figure 12 – Antenne réelle de station terrienne de télécommunications

La notion de température de bruit sert également à caractériser les amplificateurs. Si un amplificateur est connecté à une source de signal qui a une température de bruit connue (telle l'antenne précédente) T_{NS} , et que la densité N_0 de bruit ramenée à l'entrée de l'amplificateur apparaisse comme supérieure à kT_{NS} , on écrira :

$$N_0 = k(T_{NS} + T_{NA})$$

T_{NA} sert à exprimer le bruit qui naît dans l'amplificateur et est appelée *température de bruit propre à l'amplificateur*.

Le bruit des amplificateurs peut aussi être caractérisé par le *facteur de bruit* \mathcal{F} :

$$\mathcal{F} = 1 + \frac{T_{NA}}{290}$$

6. Bruit additif minimal. Limite physique concernant les amplificateurs

Les ingénieurs spécialisés dans l'amplification à faible bruit s'efforcent de réduire, le plus possible, la température de bruit telle qu'elle est définie au paragraphe 5.2. Quelle limite peuvent-ils espérer atteindre ?

Pour répondre à cette interrogation, nous nous proposons de calculer la densité spectrale du bruit au-dessous de laquelle on ne saurait descendre aux différentes fréquences du spectre électromagnétique.

Pour mettre en évidence ce minimum, nous considérerons l'amplification sous son aspect le plus général et comme essentiellement fondée sur des phénomènes de transitions stimulées (par exemple : maser ou laser).

D'une certaine façon, on peut admettre que l'amplification classique s'apparente aussi à ce processus si l'on considère que l'accroissement de puissance d'un signal amplifié se fait au détriment énergétique d'une source qui développe une différence de potentiel continue destinée à accélérer le mouvement de charges électriques.

6.1 Amplification obtenue par inversion de populations entre niveaux d'énergie atomiques

Si un certain nombre d'atomes ou de molécules peuvent se répartir en populations de niveaux d'énergie discrets, une transition d'un niveau supérieur W_2 à un niveau inférieur W_1 s'accompagne de l'émission d'un photon d'énergie particulière W et de fréquence f telles que :

$$W = W_2 - W_1 = hf$$

Réciproquement, une transition de W_1 à W_2 s'accompagne d'une absorption d'énergie W à la fréquence f .

La transition W_2 à W_1 peut être spontanée ou stimulée par des photons incidents de fréquence f ; dans ce dernier cas, on obtient une amplification car les photons émis sont cohérents avec les photons incidents.

Pour obtenir l'amplification, il faut toutefois inverser la répartition naturelle des populations N_2 et N_1 ayant les énergies W_2 et W_1 .

En effet, le rapport N_2/N_1 est régi par la relation de Boltzmann qui s'exprime de la façon suivante :

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{W_2 - W_1}{kT}\right)$$

Ce sont les niveaux d'énergie les plus faibles qui sont les plus peuplés $N_2 < N_1$.

Si l'on provoque une inversion de population $N_2 \geq N_1$ par un procédé particulier (que l'on appelle *pompage*), l'amplification peut être maintenue.

L'énergie de pompage se trouve convertie partiellement en énergie de signal au cours du processus d'amplification.

6.2 Densité spectrale minimale de bruit lorsque la température T tend vers zéro

La façon dont on vient de décrire le procédé d'amplification entraîne à considérer un milieu sélectif amplificateur comme constitué de population d'atomes d'énergie quantifiée.

Diverses démarches conduisent à définir un zéro des énergies quantifiées qui, pour un mode de résonance à la fréquence f , est égal à $hf/2$. Ainsi, les états énergétiques du mode à la fréquence f peuvent-ils être représentés comme le montre la figure 13. Ce sont les seuls niveaux discrets que peut prendre l'énergie en vertu de la discontinuité fondamentale déjà évoquée (§ 1.2).

Considérant un grand nombre de résonateurs à la fréquence f , on peut recalculer l'énergie moyenne \bar{W} qui correspond à l'équipartition de l'énergie.

La probabilité que l'énergie soit égale à $(n + \frac{1}{2})hf$ est proportionnelle à :

$$\exp\left(-\frac{(n + \frac{1}{2})hf}{kT}\right)$$

L'énergie moyenne \bar{W} est donnée par :

$$\bar{W} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (n + \frac{1}{2})hf \exp\left(-\frac{(n + \frac{1}{2})hf}{kT}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{(n + \frac{1}{2})hf}{kT}\right)} = \frac{hf}{\exp\left(\frac{hf}{kT}\right) - 1} + \frac{hf}{2}$$

Cette expression est aussi une densité spectrale de bruit dans le cas d'un mode résonnant à une dimension ([§ 2.1](#)).

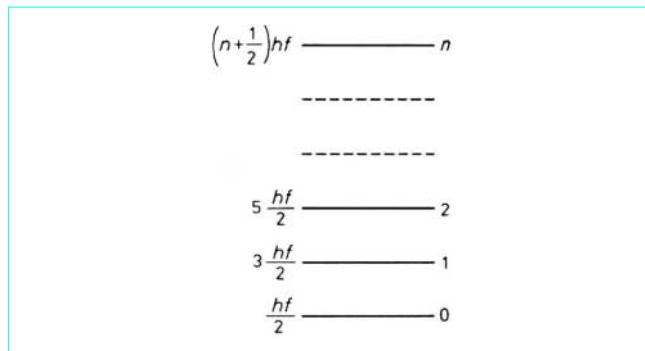


Figure 13 – Échelle des énergies

Pour connaître la limite inférieure infranchissable de la densité spectrale de bruit il faut se placer dans des conditions où la température absolue T tend vers zéro. Admettons qu'une amplification puisse encore se manifester, que l'on soit dans des conditions telles que la transition $W_2 = 3hf/2$ à $W_1 = hf/2$ puisse juste se produire. $W_2 - W_1 = hf$ apparaît alors comme la densité spectrale minimale, elle correspond en fait à l'indétermination fondamentale de l'énergie.

Cela met en évidence la seconde origine du bruit que nous appellerons *origine quantique*.

On peut définir une température de bruit T_N minimale infranchissable en écrivant l'équation :

$$\frac{hf}{\exp\left(\frac{hf}{kT_N}\right) - 1} + \frac{hf}{2} = 3 \frac{hf}{2}$$

$$\exp\left(\frac{hf}{kT_N}\right) = 2$$

$$T_N = \frac{hf}{k \ln 2} = \frac{hf}{0,693 k}$$

Le tableau [7](#) donne la température de bruit minimale.

6.3 Densité spectrale minimale de bruit à une température T

Considérons une antenne en équilibre thermodynamique avec un corps noir à la température T , antenne associée avec un amplificateur idéal de densité spectrale de bruit ramenée à l'entrée égale à hf . La densité totale du bruit est donnée à toute fréquence par la somme :

$$\frac{hf}{\exp\left(\frac{hf}{kT}\right) - 1} + hf$$

L'application numérique de cette formule est montrée sur la figure [14](#).

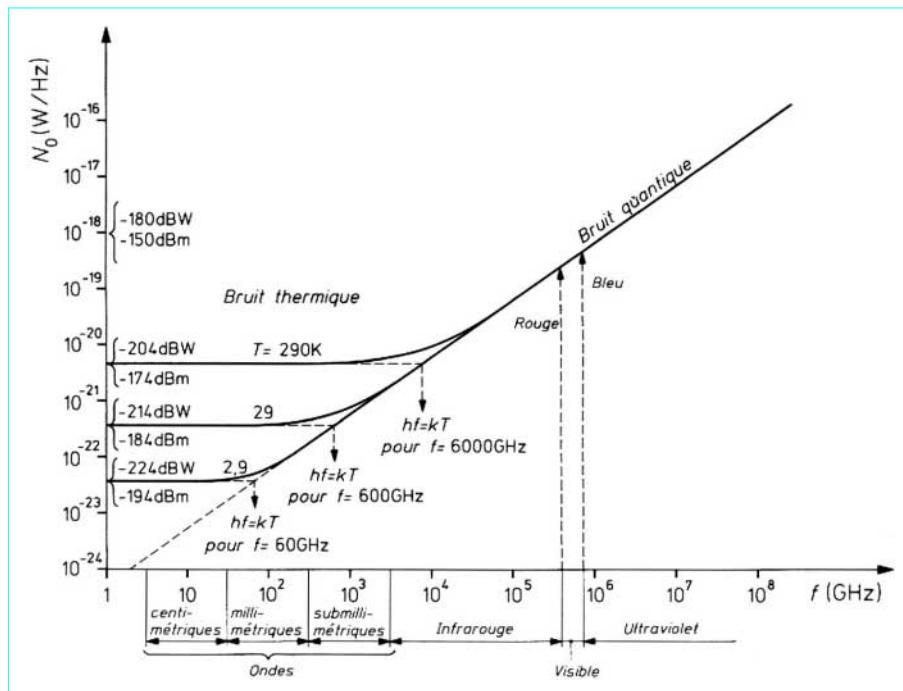


Figure 14 – Densité de bruit minimale N_0

Tableau 7 – Température minimale de bruit

Nature des ondes	Centimétriques			Millimétriques		Laser	
				$\lambda = 1,3 \mu\text{m}$	$\lambda = 0,85 \mu\text{m}$		
Fréquence (GHz)	1	4	10	94	300	230 000	350 000
Température de bruit minimale..(K)	0,060	0,277	0,692	6,51	20,77	15 980	24 440

On peut voir qu'aux fréquences radioélectriques la contribution thermique est majoritaire, mais qu'aux fréquences optiques c'est la contribution quantique qui l'emporte. Cette constatation vient de ce que l'énergie des photons est extrêmement faible aux fréquences radioélectriques.

On peut constater que c'est le concept de granularité de l'énergie et son équpartition en moyenne qui permettent l'approche des limites physiques qui ne sauraient être dépassées.

Une autre origine, non évoquée dans cet article, est la granularité de l'électricité elle-même décrite par le modèle de Schottky (article *Bruit dans les mesures électriques* [R 450] dans le présent traité).

En conclusion générale, la discontinuité fondamentale du monde physique apparaît comme la cause du bruit.

7. Conclusion

Le bruit a deux origines : thermique et quantique. Les énergies kT et hf interviennent dans les formules qui donnent la densité spectrale de bruit, leur antagonisme est la cause d'un cut-off quantique qui limite la fréquence maximale qui peut être engendrée de façon thermique.

Référence bibliographique

- [1] OLIVIER (B.M.). – *Thermal and Quantum Noise*. Proc. IEE, mai 1965.